

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI – AMSTERDAM
ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC KỲ I MÔN TOÁN LỚP 11 NĂM HỌC 2010 – 2011

Câu 1. Cho phương trình: $(1-m)\tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 3m + 1 = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = \frac{1}{2}$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (1-m)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - \frac{2}{\cos x} + 3m + 1 = 0.$$

Đặt $t = \frac{1}{\cos x}$ thì phương trình trở thành $(1-m)(t^2 - 1) - 2t + 3m + 1 = 0$ hay $(1-m)t^2 - 2t + 4m = 0$.

a) Khi $m = \frac{1}{2}$, ta được $t^2 - 4t + 4 = 0$ hay $t = 2$. Suy ra: $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi}$

b) Chú ý rằng: mỗi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tương ứng với một và chỉ một $t > 1$ của $(1-m)t^2 - 2t + 4m = 0$.

Do đó để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $(1-m)t^2 - 2t + 4m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

$$\text{Mặt khác } (1-m)t^2 - 2t + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ (1-m)t - 2m = 0 \end{cases}. \text{ Do vậy } 1 < \frac{2m}{1-m} \neq 2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}}$$

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(\Delta): 2x + 3y - 5 = 0$ và $(d): x - 2y + 1 = 0$. Hãy tìm ảnh (Δ') của đường thẳng (Δ) qua phép đối xứng trục qua đường thẳng (d) .

Giải:

Tọa độ giao điểm A của $(\Delta): 2x + 3y - 5 = 0$ và $(d): x - 2y + 1 = 0$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1).$$

Lấy điểm $B(4; -1) \in (\Delta)$. Ta sẽ tìm điểm B' đối xứng với điểm B qua (d) .

Gọi (a) là đường thẳng qua B và vuông góc với $(d) \Rightarrow \vec{n}_a = \vec{u}_d = (2; 1)$. Do đó phương trình đường thẳng (a) có dạng $2(x-4) + (y+1) = 0$ hay $(a): 2x + y - 7 = 0$.

Gọi H là giao điểm của (a) và (d) . Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

Ta có B' đối xứng với điểm B qua (d) . Do đó B' đối xứng với B qua H .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_{B'} = 2x_H - x_B = \frac{4}{5} \\ y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{23}{5} \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{4}{5}; \frac{23}{5}\right).$$

Đường thẳng (Δ') đi qua hai điểm A và B' . Do đó $(\Delta'): 18x - y - 17 = 0$

Câu 3. Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi từ X có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau, mà số đó không chia hết cho 3.

Giải:

Số có ba chữ số khác nhau là $5 \cdot 4 \cdot 3 = 100$ số.

Các tập con của X có tổng ba số chia hết cho 3 là $X_1 = \{0, 1, 2\}$, $X_2 = \{0, 1, 5\}$, $X_3 = \{0, 2, 4\}$, $X_4 = \{0, 4, 5\}$, $X_5 = \{1, 2, 3\}$, $X_6 = \{1, 3, 5\}$, $X_7 = \{2, 3, 4\}$, $X_8 = \{3, 4, 5\}$.

Số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3 chọn từ các tập hợp này là $4 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 40$ số. Đáp số là $100 - 40 = 60$ số.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm lần lượt di động trên hai cạnh AD và SC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NS}{NC} = x$ với $x > 0$.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với (SAB) và xác định giao điểm I của MN với (SBD) .

b) Mặt phẳng qua M và song song với (SAB) cắt hình chóp theo một thiết diện và cắt BD tại P . Chứng minh rằng IP luôn song song với một đường thẳng cố định và tìm x để NP song song với (SAD) .

c) Tìm x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Giải:

a) * Chứng minh MN song song với (SAB) :

Lấy K trên đoạn BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{KB}{KC} = \frac{NS}{NC}$. Suy ra MK, KN lần lượt song song với AB, BC . Từ đó suy ra hai mặt phẳng (MKN) và (ABS) song song. Vậy MN song song với (SAB) .

* Tìm giao điểm I của MN và (SBD) :

Gọi $P = MK \cap BD$; NH song song với MK với $H \in SD$. Suy ra $HP \cap MN = I$ và I là giao điểm cần tìm.

b) * Chứng minh IP song song với SB :

Ta có $\frac{NH}{CD} = \frac{SN}{SC} = \frac{BK}{BC} = \frac{PK}{DC} \Rightarrow NH = PK$ mà NH song song với PK . Do đó IP song song với NK mà NK song song với SB . Vậy IP song song với SB .

* Tìm x để NP song song với (SAD) : Đáp số: Khi $\boxed{x=1}$ thì NP song song với (SAD) .

c) Đáp số: Với $\boxed{x=1+\sqrt{2}}$ thì diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Câu 5. Với n là số nguyên dương, ta gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(x^2 + 2)^n (x + 2)^n$. Hãy tìm số n biết rằng $a_{3n-3} = 26$.

Giải:

Ta có $(x^2 + 2)^n = C_n^0 x^{2n} + 2C_n^1 x^{2n-2} + 2^2 C_n^2 x^{2n-4} + 2^3 C_n^3 x^{2n-6} + \dots + C_n^n$

và $(x + 2)^n = C_n^0 x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + 2^3 C_n^3 x^{n-3} + \dots + 2^n C_n^0$.

- Xét $n=1; n=2$ thấy không thỏa mãn.
- Xét $n \geq 3$, suy ra hệ số a_{3n-3} là của x^{3n-3} trong khai triển $(x^2 + 2)^n (x + 2)^n$ thành đa thức là

$$a_{3n-3} = C_n^0 (2^3 C_n^3) + 2C_n^1 (2C_n^1)$$

Giải phương trình $C_n^0 (2^3 C_n^3) + 2C_n^1 (2C_n^1) = 26$. Ta có:

$$\begin{aligned} C_n^0 (2^3 C_n^3) + 2C_n^1 (2C_n^1) &= 26 \Leftrightarrow 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 4n^2 = 26 \\ &\Leftrightarrow 2(n^2 - n)(n-2) + 6n^2 - 39 = 0 \Leftrightarrow 2n^3 + 4n - 39 = 0 \end{aligned}$$

Mặt khác $n \geq 3$ nên $2n^3 + 4n - 39 > 0$. Vậy không có giá trị của n nào thỏa mãn.