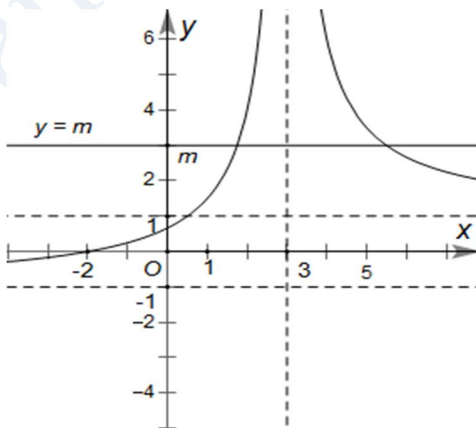


ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC KỲ I MÔN TOÁN LỚP 12 NĂM HỌC 2011 – 2012

Bài	Đáp án	Điểm												
	a. (1,5 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số. $y = \frac{x+2}{x-3} \quad (C).$ • Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$ • Sự biến thiên: – Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang: $y = 1.$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 3^+} y = +\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = 3.$ – Chiều biến thiên: $y'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty).$ • Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="3">$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>1</td></tr></table> • Đồ thị: Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.	x	$-\infty$	3	$+\infty$	y'	$-$			y	1	$+\infty$	1	0,5
x	$-\infty$	3	$+\infty$											
y'	$-$													
y	1	$+\infty$	1											

	Theo giả thiết ta có $d_1 = 2d_2 \Leftrightarrow x_0 - 3 = \frac{10}{ x_0 - 3 } \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 10$. $\Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{10} \Rightarrow M\left(3 - \sqrt{10}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ hoặc $M\left(3 + \sqrt{10}; 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.	
	c. (1 điểm) Biện luận số nghiệm của phương trình Dễ thấy $x = 3$ không là nghiệm nên phương trình tương đương với $m = \frac{x+2}{ x-3 }$. Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị (C') của hàm số $y = \frac{x+2}{ x-3 }$. Ta có: $y = \frac{x+2}{ x-3 } = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3}, & x > 3 \\ -\frac{x+2}{x-3}, & x < 3 \end{cases}$, do đó (C') được suy ra từ (C) bằng cách: Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x > 3$; lấy đối xứng phần đồ thị của (C) ứng với $x < 3$ qua Ox. Ta được đồ thị (C') như hình vẽ.	0,5
	Từ hình vẽ suy ra: * Với $m \leq -1$: Phương trình vô nghiệm. * Với $-1 < m \leq 1$: Phương trình có nghiệm duy nhất. * Với $m > 1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Ghi chú: Học sinh không lập luận để suy ra đồ thị (C') thì không cho điểm tối đa. 	0,5
	a. (1 điểm) Giải phương trình	
Bài 2 (2 điểm)	Phương trình tương đương $25 \cdot 25^{2x-x^2} + 9 \cdot 9^{2x-x^2} = 34 \cdot 15^{2x-x^2}$ $\Leftrightarrow 25 \cdot \left(\frac{25}{15}\right)^{2x-x^2} + 9 \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^{2x-x^2} = 34 \Leftrightarrow 25 \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} - 34 = 0$ Đặt $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} > 0$ PT trở thành: $25t + \frac{9}{t} - 34 = 0 \Leftrightarrow 25t^2 - 34t + 9 = 0$ $\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{9}{25}$.	0,5

$$\bullet t=1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\bullet t=\frac{9}{25} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x-x^2=-2 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{3}.$$

Kết luận PT có 4 nghiệm: $x \in \{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\}$.

0,5

b.(1 điểm) Giải phương trình

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành: $(3x-5)t^2 + (9x-19)t - 12 = 0$.

Trường hợp 1: $x = \frac{5}{3}$: Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x \neq \frac{5}{3}$: Ta có $\Delta = (9x-19)^2 + 48(3x-5) = (9x-11)^2$.

Khi đó phương trình có 2 nghiệm $t = -3; t = \frac{4}{3x-5}$.

0,5

$$\bullet t = -3 \Rightarrow \log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

$$\bullet t = \frac{4}{3x-5} \Rightarrow \log_3 x = \frac{4}{3x-5}.$$

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = \log_3 x - \frac{4}{3x-5}$ với $0 < x \neq \frac{5}{3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + \frac{12}{(3x-5)^2}$$

$$> 0 \forall 0 < x \neq \frac{5}{3}.$$

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^+} f = -\infty; \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} f = +\infty$$

x	0	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
f'		+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

0,5

Từ BBT dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

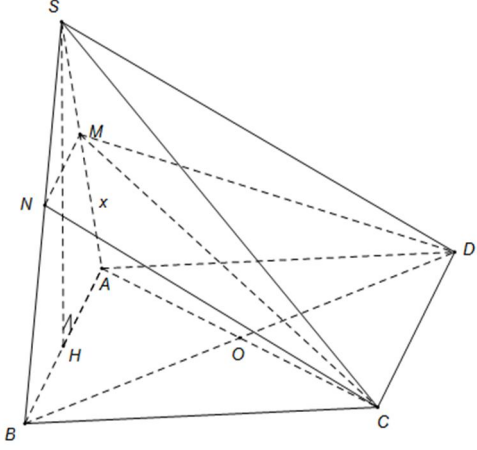
Mặt khác $f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có hai nghiệm

$$x=3; x=\frac{1}{3}.$$

Cách 2:

TH 1: Nếu $0 < x < \frac{5}{3}$: Thì hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{5}{3}\right)$ và do $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ nên

PT có nghiệm $x = \frac{1}{3}$. TH 2: Nếu $x > \frac{5}{3}$: Khi đó f cũng là hàm đồng biến trên $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ và do $f(3) = 0$ nên PT có nghiệm $x = 3$. Kết luận: PT có 3 nghiệm $x \in \left\{3; \frac{1}{3}; \frac{1}{27}\right\}$.	
Gọi H là trung điểm của AB thì SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. ΔABC đều, cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thể tích hình chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$ $= \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ (đvtt)}.$	0,5 0,5
b.(1 điểm) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp	
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, đường thẳng d qua O và vuông góc với $(ABCD)$. Dễ thấy $d \subset (SHO)$. Gọi G là trọng tâm ΔABC, qua G kẻ đường thẳng vuông góc với (ABC), đường thẳng này cắt d tại I, $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Thật vậy, theo cách dựng nên $IA = IB = IC = ID$; mà I thuộc trục của $\Delta SAB \Rightarrow IS = IA = IB$, vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp thì $R = IA$. Tam giác AOI vuông ở O, có cạnh góc vuông $IO = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Do đó } R = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$	0,5 0,5
c.(1 điểm) Tỷ số diện tích mặt cầu và mặt nón	
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S_C = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$ (đvtt). Đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có tâm O và bán kính $r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Đây cũng chính là bán kính đường tròn đáy của hình nón}$	0,5

	Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_N = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) =$ $= \frac{a\pi\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi a^2(2 + \sqrt{10})}{4}$ (đvdt). Tỉ số cần tìm là $\frac{S_C}{S_N} = \frac{7\pi a^2}{3} : \frac{\pi a^2(2 + \sqrt{10})}{4} = \frac{28}{6 + 3\sqrt{10}}$.	0,5
	d. (1 điểm) Tìm x để thể tích bằng nhau	
	Vì $CD // (SAB) \Rightarrow (CDM)$ cắt (SAB) theo giao tuyến song song với CD. Từ M, kẻ $MN // CD$, $N \in SB \Rightarrow$ hình thang $MNCD$ là thiết diện của hình chóp và (CDM). Dễ thấy (SAC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}V$, (V là thể tích hình chóp $S.ABCD$).	0,5
	Gọi V_1 là thể tích của hình chóp $S.MNCD$, V_2 là thể tích phần còn lại (của hình chóp $S.ABCD$ sau khi cắt bởi (CDM)). Khi đó ta có: $\begin{cases} V_1 + V_2 = V \\ V_1 = V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2}. \text{ Tức là ta có: } \frac{V_1}{V_{S.ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNC} + V_{S.MDC}}{V_{S.ABC}} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}} = 1 \text{ (Vì } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V \text{)}.$ $\Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SD}{SD} \cdot \frac{SC}{SC} = 1 \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \left(\frac{SN}{SB} + 1 \right) = 1$ $\Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \left(\frac{SM}{SA} + 1 \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{a-x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(3-\sqrt{5})a}{2}.$ Vậy, với $x = \frac{(3-\sqrt{5})a}{2}$ thì (CDM) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau.	0,5
	Cách 1: Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm nên PT tương đương: $m = \frac{\sqrt{4x-x^2}-2}{x}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}-2}{x}$ trên miền $D = (0; 4]$. Ta có $f'(x) = \frac{2\sqrt{4x-x^2}-2x}{x^2\sqrt{4x-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Chú ý rằng :	0,5

Bài 5
(0,5 điểm)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Từ BBT suy ra điều kiện cần và đủ để PT có 2 nghiệm phân biệt là $-\frac{1}{2} < m < 0$.

x	0	2	4	
f'		+	0	-
$f(x)$			0	

Cách :2

Xét hàm số $y = \sqrt{4x - x^2} \ (C)$ trên

$[0;4]$. Ta có $y' = \frac{2-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; Ta có bảng

biến thiên như hình vẽ:

0,25

Số nghiệm của PT chính là số giao điểm của đường thẳng $d: y = mx + 2$ và đồ thị (C) . Để ý rằng d có hệ số góc m và luôn đi qua điểm $A(0;2)$ cố định.

x	0	2	4	
y'		+	0	-
y			2	

Gọi Δ (có hệ số góc k) là tiếp tuyến đi qua A của (C) . Ta có

$\Delta: y = k(x - 0) + 2$ hay $\Delta: y = kx + 2$. Δ là tiếp tuyến khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} kx + 2 = \sqrt{4x - x^2} & (1) \\ k = y'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4x-2x^2}} & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1): $\frac{2x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}} + 2 = \sqrt{4x-x^2}$

$$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Delta: y = 2.$$

• Mặt khác $(C) \cap Ox$ tại 2 điểm $O(0;0), B(4;0)$. Khi đó PT đường thẳng

(AB) là $(AB): \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ hay $(AB): y = -\frac{1}{2}x + 2$. Vậy, điều kiện cần và đủ

để PT có 2 nghiệm phân biệt là đường thẳng d nằm giữa hai đường thẳng Δ

và $(AB) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$.

0,25