

**VẤN ĐỀ 4. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.
TÍNH TIẾN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ**

Dạng 1. Điểm uốn của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a; b)$.

• Đồ thị hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f''(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ và lõm trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$;

• Cho $x_0 \in (a; b)$. Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.

• Phương pháp tìm khoảng lồi lõm và điểm uốn của hàm số $y = f(x)$:

Bước 1: Tìm miền xác định.

Bước 2: Tìm $f'(x), f''(x)$.

Bước 3: Lập bảng xét dấu của $f''(x)$.

Bước 4: Kết luận.

1. Tìm khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị các hàm số

a) $y = x^3 - 9x^2 + 2x - 3$. Đs: Lồi trên $(-\infty; 3)$, lõm trên $(3; +\infty)$, điểm uốn $M(3; -51)$.

b) $y = 2x^4 - 6x^2 + 5$. Đs: Lồi trên $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, lõm trên $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$, Điểm uốn $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

2. Chứng minh rằng:

a) Hoành độ điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ là $x = -\frac{b}{3a}$.

b) Các điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x \sin x$ luôn nằm trên đường cong $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

3. Tìm điều kiện của a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$

a) Có hai điểm uốn.

b) Không có điểm uốn.

4. Tìm m để đồ thị hàm số:

a) (TSDH, D, 04) $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ có điểm uốn nằm trên đường thẳng $(d): y = x + 1$.

Đs: $m = 0; m = \pm 2$.

b) $y = -\frac{1}{m}x^3 + 3mx^2 - 1$ có điểm uốn nằm trên parabol $(P): y = 2x^2 - 1$. Đs: $m = 1$.

5. Tìm các tham số a, b để đồ thị hàm số:

a) $y = ax^3 + bx^2 - 3x + 2$ nhận điểm $I(1; 3)$ làm điểm uốn. Đs: $a = -2, b = 6$.

b) $y = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận điểm $I(1; 1)$ làm điểm uốn. Đs:

6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$.

a) Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 2)$ làm trục đối xứng.

b) Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

7. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số sau có ba điểm uốn thẳng hàng:

a) $y = \frac{2x-3}{x^2-3x+3}$. Đs: $A(0;-1), B(3;1), C\left(\frac{3}{2};0\right) \Rightarrow 2x-3y-3=0$.

a) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. Đs: $A(1;1), B\left(-2-\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right), C\left(-2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow x-4y+3=0$.

Dạng 2. Tịnh tiến hệ trục tọa độ

• Cho tọa độ điểm $I(x_0; y_0)$ trong hệ trục tọa độ Oxy . Khi đó công thức chuyển hệ trục

tọa độ Oxy về hệ trục IXY theo vector \overrightarrow{OI} là
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

• Phương trình đường cong $(C): y = f(x)$ trong hệ trục tọa độ mới IXY là $Y = f(X + x_0) - y_0$.

• Chú ý rằng đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

8. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2 - 4$.

a) Tìm điểm uốn I của đồ thị hàm số (C) .

b) Viết phương trình của đồ thị (C) trong hệ tọa độ mới IXY .

c) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của (C) .

9. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

a) $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ nhận điểm $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.

b) $(C): y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ nhận điểm $I(1;-1)$ làm tâm đối xứng.

10. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

a) $(C): y = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 4$ nhận đường thẳng $(d): x = 1$ làm trục đối xứng.

b) $(C): y = \frac{x+1}{x+3}$ nhận đường thẳng $(d): y = x + 4$ làm trục đối xứng.