## VẤN ĐỀ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

- Số $M$ gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ xác định trên $D$ nếu $\begin{cases}\forall x\in D: f(x)\le M\\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M\end{cases}$. Kí hiệu là $\max\limits_{x\in D} f(x)=M=f(x_0)$.

- Số $m$ gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $D$ nếu $\begin{cases}\forall x\in D: f(x)\ge m\\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m\end{cases}$. Kí hiệu là $\min\limits_{x\in D} f(x)=m=f(x_0)$.

- Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

*Cách 1:* Sử dụng định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

*Cách 2:* Sử dụng bảng biến thiên.

- Ngoài ra, nếu hàm số $y=f(x)$ *liên tục* trên *đoạn* $[a;b]$ ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất như sau:

*Bước 1:* Tìm các nghiệm $x_1;x_2;...;x_n$ của phương trình $f'(x)=0$ trên đoạn $[a;b]$.

*Bước 2:* Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$. Từ đó rút ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

**1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) (TN, 10) $y=x^4-8x^2+5$ trên $[-1;3]$. *Đs:* $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)=-11;\ \max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)=14$.

b) (TN, 09) $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ trên $[2;4]$. *Đs:* $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=-5;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=-3$.

c) (TN, 08) $y=\dfrac{x^2+9}{x}$ trên $[2;4]$. *Đs:* $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(3)=6;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{13}{2}$.

d) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-x}$. *Đs:* $\min y=y(5)=2\sqrt{3};\max y=y(2)=y(8)=\sqrt{6}$.

e) $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên $[-1;3]$. *Đs:*

**2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=\sin 2x-x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Đs:* $\max y=y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2},\min y=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

b) (TN THPT 2008) $y=x+\sqrt{2}\cos x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Đs:* $\max y=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+1$; $\min y=y(0)=\sqrt{2}$.

c) (TN THPT 2003) $y=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$. *Đs:* $\min y=0;\max y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) $y=\dfrac{\cos x+1}{\cos^2 x+\cos x+1}$. *Đs:*

e) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$ bằng nhiều cách. *Đs:* $\max y=3+2\sqrt{2};\min y=3-2\sqrt{2}.$

**3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y=4x^3-12x^2+9x$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. *Đs:* $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{3}{2}\right)} \mathrm{y}=\mathrm{y}\left(\dfrac{1}{2}\right)=2.$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$. *Đs:* $\max y=y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2},\min y=y\left(-2\right)=-2.$

c) $y=\sqrt{5-4x}$ trên $\left[-1;1\right]$. *Đs:* $\max y=y\left(-1\right)=3,\min y=y\left(1\right)=1.$

d) $y=x+\dfrac{1}{x}-5$ trên $(0;+\infty)$. *Đs:* $\min y=y\left(1\right)=-3,$ không tồn tại $\max y.$

e) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$ trên $\left[0;3\right]$. *Đs:* $\min y=y\left(2\right)=0,\max y=y\left(0\right)=2.$

**4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$. *Đs:*

b) $y=5\cos x-\cos 5x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$. *Đs:* $\max y=y\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3};\min y=y\left(0\right)=4.$

c) $y=3\cos 3x+2\cos 2x+9\cos x+2$. *Đs:* $\min y=-8;\max y=16.$

d) $y=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+5}+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+8}.$ *Đs:* $\max y=y\left(k2\pi\right)=2+\sqrt{13};$ $\min y=y\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=5.$

**5.** a) Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $12x^2-6mx+m^2-4+\dfrac{12}{m^2}=0$. Tìm $m$ để biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. *Đs:* $\max A=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi $m=2\sqrt{3};\min A=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi $m=-2\sqrt{3}.$

b) Giả sử $\left(x;y\right)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+y=a\\x^2+y^2=6-a^2\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=xy+2\left(x+y\right)$. *Đs:* $\min F=-4$ đạt được khi $a=-1.$