VẤN ĐỀ 1. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Dạng 1. Dãy số có giới hạn 0

- Cho dãy số $(u_n), n \geq 1$. Ta biểu diễn dãy số này trên trục số. Nếu càng ngày khoảng cách từ số hạng u_n đến 0 càng nhỏ khi cho n tăng; khoảng cách này nhỏ bao nhiêu tùy ý, miễn là n đủ lớn thì ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0, ký hiệu là $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$ hoặc rút gọn là $\lim u_n = 0$.

- Ta thường sử dụng các định lý sau:

Định lý 1: dãy số $(u_n), n \geq 1$ có giới hạn là $0 \Leftrightarrow$ dãy số $(|u_n|), n \geq 1$ có giới hạn là 0.

Định lý 2: $\lim 0 = 0$.

Định lý 3: $\lim \dfrac{a}{n^k} = 0$, với k là số thực dương và a là hằng số cho trước.

Định lý 4: (Nguyên lý kẹp) Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n \geq 1$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lý 5: Nếu q là số thực thỏa mãn $-1 < q < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

1. Tìm giới hạn của

a) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}}, k \in \mathbb{N}^*$. b) $\lim \dfrac{c}{\sqrt[k]{n}}, k \in \mathbb{N}^*$. c) $\lim \dfrac{(-1)^n}{n^k}, k \in \mathbb{N}^*$. d) $\lim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n}}, k \in \mathbb{N}^*$.

2. Tìm giới hạn của các dãy số $(u_n), n \geq 1$ sau đây:

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+3}$. b) $u_n = \dfrac{\sin n}{n+5}$. c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n+5}$. d) $u_n = -\dfrac{\sin \frac{n\pi}{5}}{(1{,}001)^n}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{n!}$. g) $u_n = \dfrac{\cos \frac{n\pi}{5}}{4^n}$. h) $u_n = \dfrac{n \cos 3n}{n^2+1}$.

3. Tìm giới hạn của các dãy số $(u_n), n \geq 1$ sau đây:

a) $u_n = \dfrac{6^n \cos 3n + 5^n}{2^n + 2.7^n}$. k) $u_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}$.

c) $u_n = \dfrac{n^2 + 3\sin^n(n+4)}{n^3+4n}$ d) $u_n = \dfrac{4n\sin^n 2n + \cos^n 2n}{4n^2+8n}$

e) $u_n = \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{2.4^n}$

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

- Dãy số $(u_n), n \geq 1$ có giới hạn (hữu hạn) là L nếu dãy số $(u_n - L), n \geq 1$ có giới hạn là 0.

4. Chứng minh rằng

a) $\lim \frac{3n+2}{6n+5} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim \frac{2.3^{n+2} - 3.2^{n}}{6.3^{n} + 2^{n}} = 3$.

c) $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right) = 1$.

d) $\lim \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4} = 2$

e) $\lim \frac{7^n - 2.8^n}{8^n + 3^n} = -2$

g) $\lim(\sqrt{4n^2 + 4n} - 2n) = 1$

h) $\lim \frac{\sqrt{n} + \sin^n n}{\sqrt{n} + 1} = 1$

5. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$.

b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right).....\left(1 - \frac{1}{n^n}\right)$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

c) $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + ... + \frac{2n-1}{n^2}$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $u_n = 1$.

d) $u_n = \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6....2n}\left(n \in N^*\right)$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $0 < \left(u_n\right)^2 < \frac{1}{2n+1}$.

e) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} (n \in N^*)$